自分なりに頑張って集めてみた
無限級数ランキング！

ドーン

第10位 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{5}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{7}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{11}}\times\cdots$

第9位 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\cdots=\infty$

第8位 $\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

解説

10・9位は素数に関するもの。8位はネイピア数 e の定義式。

第10位：自然数の逆数和が「1から素数の逆数を引いたもののそのまた逆数」の無限積（オイラー積）で表せる。一般には、$s>1$ に対して

$$1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{2^s}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{3^s}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{5^s}}\times\cdots \equiv \zeta(s)$$

として、ゼータ関数と呼ばれる量が定義される。

第9位：素数の逆数和は発散する。が実際に計算してみると、その増加は非常にゆっくりしている。現在の計算機では、$1+\cdots+\frac{1}{1801241230056600523}$ まで足してようやく4を超えることがわかったぐらい。

第8位：この級数は非常に早く収束する。

関連項目 → ・指数関数のベキ級数展開

$$e^x = 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

・三角関数のベキ級数展開

$$\sin x = x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

⟹ オイラーの関係式

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \quad (i:虚数単位)$$

当然の帰結として、$(x=\pi)$

$$e^{i\pi}+1=0$$

美しい!!

リチャードファインマン（米）曰く、「人類の至宝」そこまで言うか、ファインマン！

第7位 $\frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots$

第6位 $\frac{\pi^2}{6} = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\cdots$

第5位 $\pi = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1}-\frac{2}{8k+4}-\frac{1}{8k+5}-\frac{1}{8k+6}\right)$

解説　円周率に関するのを集めてみた。

第7位：ライプニッツの公式と呼ばれる。だがかなり前から知られているようで、歴史を遡ると、1400年頃
にインドのマーダヴァという人がすでにこの式を知っていたとか。

第6位：右辺の形からも分かるように、これは $\zeta(2)$（←第10位の解説参照）。こういう級数の収束値
に円周率が関わってくるのを見ると、「また π かよ…」としか言いようがない。

第5位：この式は特に美しいわけでもないが、何が重要かというと、このやり方で π を算出する際、
十六進法または二進法で、$n-1$ 桁までを求めずに、いきなり n 桁から先を計算でき
るという点。面白いことにこの等式が発見された日時がかなり正確に判っていて、1995年
9月19日午前0時29分なのだそうだ。きっと研究者の仕事机に時計がおいてあって、
たまたま記録にとっといたとか、そんなんだろう。だからどうしたという話だが。

他にも、人類の円周率に対するフェティシズムはとどまるところを知らなくて、近似値・級数・無限積・連分数
を用いて π を求めようとする試みは多くある。5世紀にはもう中国の祖沖之という人がかなり正確な値、
$3.1415926 < \pi < 3.1415927$ を示していたらしい。

関連項目 ⟶ 他にもこんな式が。どうやって導いたんだこんなの!!

- $x_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$，$x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}}$，$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} x_n$
- $\frac{3\sin\theta}{2+\cos\theta} < \theta < \frac{2\sin\theta + \tan\theta}{3}$ から、近似値 $3.1415926533 < \pi < 3.1415926538$。
- $\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{\ddots}}}}$
- $\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k!)(1103 + 26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}$ ← インドの大天才ラマヌジャンによる。　でましたラマヌジャン！みんな大好きラマヌジャン！
- $\frac{\pi}{4} = 12 \arctan\frac{1}{18} + 8 \arctan\frac{1}{57} - 5 \arctan\frac{1}{239}$（ガウスの公式）　でましたガウスよ！数学王！

第4位　$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \cdots = 0$

第3位　$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \cdots = \frac{1}{4}$

第2位　$1 - 2^0 + 3^0 - 4^0 + 5^0 - \cdots = \frac{1}{2}$

解説　不可解な収束をするものを集めた。

第4位：まあ、言われてみればそうなる気もするような結果。ただ
第3位：についてはどうか。さらにわからないのは
第2位：のこれ…。要するに $1-1+1-1+\cdots = \frac{1}{2}$ ということ？

まあ種明しをすれば、これは皆さんご存知の、無限等比級数の和公式から導くのが簡単。

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{n-1} + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad \cdots (i)$$

の両辺を微分して $x=-1$ とすれば第3位の式が導ける。他の2つも似たようなもん。
やってみて。

ん、(i)が成立するのは $|x|<1$ の時だけだったのではないか。

$x=-1$ を代入してよいのか、という疑問が。

実はこれは (i)式を、$x\neq 1$ で正則な関数 $\dfrac{1}{1-x}$ の、点 $x=0$ の周りでのベキ級数展開と見てやれば良いのだ。$\dfrac{1}{1-x}$ は $x\neq 1$ で、複素数も含めて定義されるのだから。ちゃんとした議論は、大学で解析接続を学んで下さい。今回は $|x|<1$ で定義された関数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ を、$x\neq 1$ で定義された関数 $\dfrac{1}{1-x}$ に接続したわけです。

他にも振動して極限が定まらない数列の「平均極限」という見方もできる。特に第2位。

関連項目

$$1-2^3+3^3-4^3+5^3-6^3+\cdots = -\frac{2}{16} = -\frac{1}{8}$$
$$1-2^4+3^4-4^4+5^4-6^4+\cdots = 0$$
$$1-2^5+3^5-4^5+5^5-6^5+\cdots = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$
$$1-2^6+3^6-4^6+5^6-6^6+\cdots = 0$$
$$\vdots$$

そして堂々第1位は、

$$1+2+3+4+\cdots+n+\cdots = -\frac{1}{12}$$ バーン

解説　いわゆる繰込公式。無限大に発散する量を有限の値に納める驚異の大技。

これも解析接続後の値。つまりある関数の特別な値としてこの級数を見るのだ。

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-s} = 1^{-s}-2^{-s}+3^{-s}-4^{-s}+5^{-s}-\cdots$$

とする。ちょっと変形する。

$$\varphi(s) = 1^{-s}+2^{-s}+3^{-s}+\cdots -2\{2^{-s}+4^{-s}+6^{-s}+\cdots\}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - 2\sum_{n=1}^{\infty}(2n)^{-s}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - 2\cdot 2^{-s}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$
$$= (1-2^{1-s})\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

これ。これ見た。第10位んとこで。

$$= (1-2^{1-s})\,\zeta(s)$$

$\dfrac{1}{1^s}+\dfrac{1}{2^s}+\dfrac{1}{3^s}+\cdots$　だからゼータ関数だ!

第4,3,2位で見た級数は $\varphi(s)$ の $s=-2,-1,0$ の時の値であるから、これを使って $\zeta(s)$ の s が負の整数の時の値を定めることができる。あ、あと $s=0$ のも。

$s=0$. $\varphi(s) = 1-2^0+3^0-\cdots = \dfrac{1}{2}$

$(1-2^{1-0})\,\zeta(0) = -\zeta(0)$　　$\therefore\ \zeta(0) = -\dfrac{1}{2}$

$s=-1$. $\varphi(-1) = 1-2+3-4+\cdots = \dfrac{1}{4}$

$(1-2^{1+1})\,\zeta(-1) = -3\,\zeta(-1)$　　$\therefore\ \zeta(-1) = -\dfrac{1}{12}$ ← これが上の式。

$s=-2$. $\varphi(-2) = 1-2^2+3^2-4^2+\cdots = 0$

$(1-2^{1+2})\,\zeta(-2) = -7\,\zeta(-2)$　　$\therefore\ \zeta(-2) = 0$

$\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ からは $1+1+1+1+\cdots = -\frac{1}{2}$、$\zeta(-2)=0$ からは $1+4+9+16+\cdots = 0$ という、いずれも常軌を逸した結果が出てくる。
$1+2+3+4+5+6+\cdots = -\frac{1}{12}$ というこの式、実は物理でもカシミールエネルギーの表式に現れたりする。量子力学では無限に発散する量を有限におさめて意味を持たせる繰込というテクニックは不可欠である。
それとゼータ関数について色々調べてみよう！すごいんだぜ、あれ！

ここに紹介した級数たちの収束値の証明は、自分達でやってみよう！
一部は導出を示しているが、それ以外のやり方でも求まるかも知れない。
ところで、わざわざランキング形式にした意味はあるのか！

付記

吉田寮もまた、無限級数ほどではないにしても、驚きや発見に満ちた楽しい場所です。あと何か、変に居心地良いんすよね。まあ一度来てみるのも一考かと思います。
ここに書いてある内容についての質問・意見があっても受けつけません
数学科の先輩か教授に聞け！

文：yshr